**Faculdade de Engenharia**
**Departamento de Ciências Aeroespaciais**
**Licenciatura em Engenharia Aeronáutica**

Estruturas Aeroespaciais II – 15095 2025/2026

# Mini-Projeto

## Dimensionamento da Wingbox Compósita de uma Aeronave Biplace Ligeira

Equipa 9

**Pedro Reis** Nº 51612
**Bruna Silva** Nº 51799
**Vladyslav Berezyak** Nº 51983
**Frederico Madeira** Nº 52537

10 de junho de 2026

# 1 Introdução

No âmbito da unidade curricular de *Estruturas Aeroespaciais II*, o presente trabalho tem como objetivo o dimensionamento estrutural de uma *wingbox* em material compósito pertencente à asa de uma aeronave biplace ligeira com massa máxima à descolagem de $m = 650\,\text{kg}$ e fatores de carga limite $n = +4\,/\,-2$. A estrutura deve cumprir restrições de resistência estática, estabilidade à flambagem, rigidez à flexão ($\delta_{\text{tip}} \leq 0{,}1b$) e rigidez à torção ($\phi_{\text{tip}} \leq 2{,}0°$), minimizando a função objetivo

$$f = 0{,}6\,M + 0{,}4\,C/100 \tag{1}$$

onde $M$ é a massa total (kg) e $C$ é o custo de material (EUR).

O trabalho estrutura-se em três fases complementares:

1. **Método da Idealização Estrutural (MIE)**: formulação analítica baseada na Teoria Clássica dos Laminados (TCL) e no método das vigas de parede fina, implementada num código de otimização global em Python;
2. **Método dos Elementos Finitos (MEF)**: validação numérica com o programa comercial ANSYS® (módulos ACP Pre + Static Structural);
3. **Ensaio Experimental**: fabrico de provetes representativos do laminado das almas (L2) e ensaio de tração segundo a norma ASTM D3039.

## Parâmetros geométricos (equipa $i = 9$)

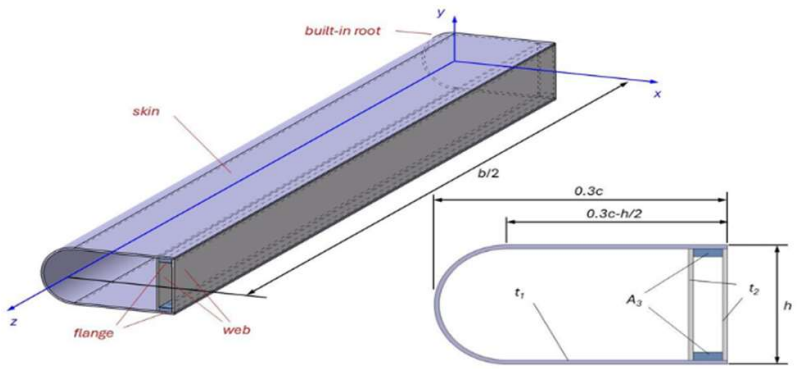



**Figura 1:** Geometria da caixa de torção.

**Tabela 1:** Parâmetros geométricos calculados para $i = 9$.

| Parâmetro | Expressão | Valor |
|---|---|---|
| Envergadura total $b$ | $11{,}5 - 0{,}01(i-1)$ | 11.42 m |
| Corda $c$ | $0{,}75 + 0{,}01(i-1)$ | 0.830 m |
| Altura da wingbox $h$ | $[0{,}14 + 0{,}001(i-1)]c$ | 122.84 mm |
| Largura reta $W_{\text{box}}$ | $0{,}3c - h/2$ | 187.58 mm |
| Raio de bordo de ataque $R$ | $h/2$ | 61.42 mm |
| Comprimento semi-asa $L_{\text{span}}$ | $b/2$ | 5710 mm |
| Área fechada da linha média $A_{\text{encl}}$ | $W_{\text{box}} \cdot h + \frac{1}{2}\pi R^2$ | 28 968 mm$^2$ |
| Perímetro da casca $P_{\text{skin}}$ | $2W_{\text{box}} + \pi R$ | 568.12 mm |
| Área alar $S$ | $b \cdot c$ | 9.479 m$^2$ |

# 2 Otimização Estrutural

## 2.1 Teoria Clássica dos Laminados – Propriedades Equivalentes

Cada laminado foi caracterizado através da matriz de rigidez de extensão $[A]$, obtida pela soma das contribuições de cada camada $p$ de espessura $t_p$:

$$A_{ij} = \sum_{p=1}^{N} \bar{K}_{ij}^{(p)}\, t_p \tag{2}$$

A matriz reduzida transformada $\bar{K}^{(p)}$ de cada camada é obtida a partir da matriz no referencial do material ($K_{11}$, $K_{22}$, $K_{12}$, $K_{33} = G_{12}$) através da transformação de eixos:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{K}\,\mathbf{T}^{-T} \tag{3}$$

com $m = \cos\theta$, $n = \sin\theta$. As constantes de engenharia equivalentes são obtidas por inversão analítica $[a] = [A]^{-1}$:

$$E_x = \frac{1}{t\,a_{11}}, \quad E_y = \frac{1}{t\,a_{22}}, \quad G_{xy} = \frac{1}{t\,a_{33}}, \quad \nu_{xy} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad \nu_{yx} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{4}$$

Para garantir simetria do empilhamento ($B = 0$) e balanceamento, foram impostas as restrições $|n_{+45} - n_{-45}| \leq 2$ para os laminados de tecido e sequências simétricas em todos os laminados.

**Tabela 2:** Configuração ótima e propriedades equivalentes dos três laminados.

| | **L1 – Casca** | **L2 – Almas** | **L3 – Mesas** |
|---|---|---|---|
| Material base | CE-2D* | CE-2D* | CE-1D* |
| Empilhamento | $[+45_3/-45_4]_s$ | $[+45_1/-45_2]_s$ | $[0_{46}]_s$ |
| N.º camadas | 14 | 6 (por alma) | 92 |
| $t_0$ (mm) | 0,226 | 0,226 | 0,132 |
| $t$ total (mm) | 3,164 | 1,356 | 12,144 |
| $E_x$ (MPa) | 13 291 | 13 291 | 140 000 |
| $E_y$ (MPa) | 13 291 | 13 291 | 10 000 |
| $G_{xy}$ (MPa) | 23 864 | 23 864 | 5 000 |
| $\nu_{xy}$ | 0,772 | 0,772 | 0,300 |

A predominância de camadas a ±45° em L1 e L2 é fisicamente coerente com o carregamento: estas paredes são solicitadas dominantemente por fluxo de corte gerado pelo esforço transverso e pelo momento torsor aerodinâmico. O elevado $G_{xy} = 23\,864$ MPa traduz essa eficiência. As mesas (L3), afastadas do eixo neutro, recebem as tensões axiais de flexão e tiram partido do elevado módulo longitudinal $E_x = 140$ GPa do CE-1D*.

## 2.2 Esforços Externos e Casos de Carga

A velocidade de perda, de cruzeiro e de mergulho foram calculadas por:

$$V_S = \sqrt{\frac{2W}{\rho\, S\, C_{L_{\max}}}}, \quad V_C = 2{,}4\sqrt{\frac{W}{S}}, \quad V_D = \max(125;\ 3{,}75\,V_S;\ 1{,}4\,V_C)\ \text{m/s} \tag{5}$$

**Tabela 3:** Velocidades características calculadas.

| $V_S$ | $V_C$ | $V_D$ |
|---|---|---|
| 25,72 m/s | 62,24 m/s | 125,00 m/s |

Três casos de carga independentes foram considerados, conforme o enunciado. A carga distribuída de sustentação ($w_L$), arrasto ($w_D = w_L/20$) e torsor ($w_T$) foram aplicadas à meia-asa em consola. Os esforços de reação na raiz encontram-se na Tabela 4.

**Tabela 4:** Esforços de reação na raiz para os três casos de projeto.

| Caso | $n$ | $V$ (m/s) | $S_x$ (N) | $S_y$ (N) | $M_x$ (N · mm) | $M_y$ (N · mm) | $T$ (N · mm) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Carga (a) | +4 | 125,00 | 867,5 | 12 735 | $-3{,}64\times10^{7}$ | $-2{,}48\times10^{6}$ | $+4{,}14\times10^{6}$ |
| Carga (b) | -2 | 62,24 | -1418,7 | -6223 | $+1{,}78\times10^{7}$ | $+4{,}05\times10^{6}$ | $+1{,}03\times10^{6}$ |
| Carga (c) | +4 | 0 | 0 | 12 749 | $-2{,}04\times10^{7}$ | 0 | 0 |

## 2.3 Idealização Estrutural e Análise Iterativa

A secção transversal foi idealizada com **8 booms** interligados por 8 painéis:

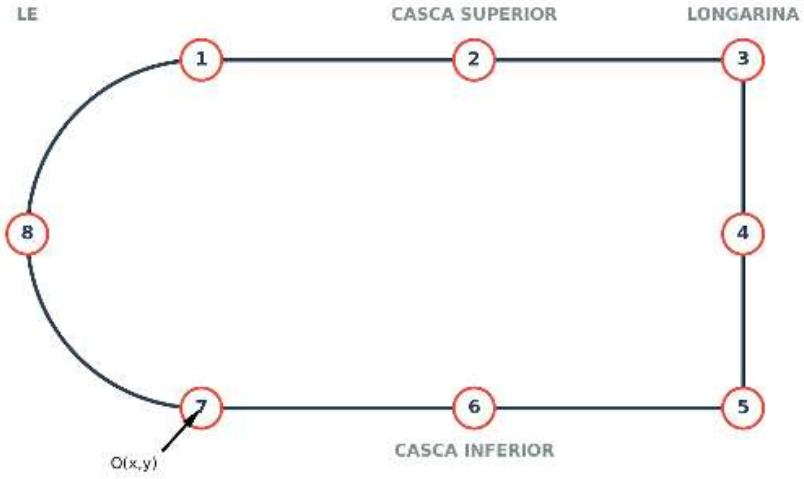



**Figura 2:** Idealização estrutural da secção por booms.

Os booms 3 e 5 representam as mesas da longarina, com área própria $A_3 = b_3 t_3$. Os restantes possuem área material nula, concentrando apenas a contribuição efetiva das cascas adjacentes segundo:

$$B_r = A_r + \frac{1}{E_{z,r}} \sum_{j} \frac{E_{z,j}\, t_j\, b_j}{6} \left(2 + \frac{\sigma_{z,j}}{\sigma_{z,r}}\right) \tag{6}$$

Como a dependência é não-linear nas razões de tensões, o cálculo foi realizado através de um algoritmo iterativo com critério de convergência $\max |\Delta\sigma/\sigma| < 10^{-4}$, atingido em poucas iterações. O centroide da secção foi posicionado em $\bar{x} = 158{,}79\,\text{mm}$, $\bar{y} = 61{,}89\,\text{mm}$.

A tensão axial em cada boom foi determinada pela fórmula de flexão biaxial com segunda área de inércia modificada (ponderada pelos módulos $E_{z,i}$):

$$\sigma_{z,r} = E_{z,r} \left[ \frac{M_y EI_{xx} - M_x EI_{xy}}{EI_{xx} EI_{yy} - EI_{xy}^2}\, x'_r + \frac{M_x EI_{yy} - M_y EI_{xy}}{EI_{xx} EI_{yy} - EI_{xy}^2}\, y'_r \right] \tag{7}$$

Os resultados convergidos para o caso dimensionante (a) mostram que as mesas absorvem $\sigma_{z,3} \approx -654\,\text{MPa}$ e $\sigma_{z,5} \approx +623\,\text{MPa}$, evidenciando a eficiência do CE-1D* nas mesas, dez vezes mais solicitadas do que o revestimento (50 a 70 MPa).

**Tabela 5:** Coordenadas, áreas efetivas e tensões axiais dos booms – Caso (a).

| Boom | $x$ (mm) | $y$ (mm) | Laminado | $B_r$ (mm$^2$) | $\sigma_z$ (MPa) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,00 | 121,26 | L1 (Casca) | 238,0 | 48,87 |
| 2 | 93,79 | 121,26 | L1 (Casca) | 824,0 | 55,53 |
| 3 | 186,22 | 121,26 | L3 (Mesa) | 379,3 | 654,16 |
| 4 | 186,22 | 61,42 | L2 (Alma) | 678,0 | 1,48 |
| 5 | 186,22 | 1,58 | L3 (Mesa) | 379,3 | +623,08 |
| 6 | 93,79 | 1,58 | L1 (Casca) | 721,2 | +65,72 |
| 7 | 0,00 | 1,58 | L1 (Casca) | 253,9 | +72,39 |
| 8 | 59,84 | 61,42 | L1 (Casca) | 271,1 | +16,01 |

## 2.4 Fluxo de Corte e Redistribuição em Torno da Abertura

O fluxo de corte total foi calculado como:

$$q_{\text{total}} = q_b + q_{s0} + q_T, \qquad q_T = \frac{T}{2\,A_{\text{encl}}} = -80{,}04\,\text{N/mm} \tag{8}$$

O fluxo de torção domina a distribuição tangencial no caso crítico (a), confirmando que a rigidez torcional é o critério cativo de dimensionamento das paredes. O fluxo máximo registou-se no painel 34 (painel da alma dianteira): $q_{\text{total,3-4}} \approx -173{,}8\,\text{N/mm}$.

**Tabela 6:** Distribuição do fluxo de corte nos 8 painéis – Caso (a).

| Painel | Booms | $L$ (mm) | $q_b$ (N/mm) | $q_{s0}$ (N/mm) | $q_T$ (N/mm) | $q_{\text{total}}$ (N/mm) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1–2 | 93,79 | 4,07 | 13,27 | 80,04 | 70,84 |
| 2 | 2–3 | 93,79 | 20,10 | 13,27 | 80,04 | 86,87 |
| 3 | 3–4 | 59,84 | 107,00 | 13,27 | 80,04 | 173,77 |
| 4 | 4–5 | 59,84 | 107,35 | 13,27 | 80,04 | 174,12 |
| 5 | 5–6 | 93,79 | 24,56 | 13,27 | 80,04 | 91,33 |
| 6 | 6–7 | 93,79 | 7,96 | 13,27 | 80,04 | 74,73 |
| 7 | 7–8 | 93,99 | 1,52 | 13,27 | 80,04 | 68,29 |
| 8 | 8–1 | 93,99 | 0,00 | 13,27 | 80,04 | 66,77 |

**Redistribuição no furo de combustível**

A abertura circular de $d_f = 60\,\text{mm}$ no extradorso foi tratada como uma descontinuidade local, resolvida por um sistema de cinco equações de equilíbrio de forças de corte nas baías adjacentes. O fluxo anula-se na borda livre ($q''_{23} = 0$) e o acréscimo de tensão axial nos booms vizinhos é de apenas $\pm 3{,}3\,\text{MPa}$, ou seja, inferior a 0,5% das tensões nas mesas ($> 600\,\text{MPa}$). Conclui-se que o efeito local da abertura não é dimensionante para a configuração ótima obtida.

## 2.5 Análise de Resistência – Critério de Tsai-Hill

A análise à escala da lâmina individual foi conduzida transformando as extensões no plano médio para os eixos do material via matriz de rotação $T$, e verificando o critério interativo de Tsai-Hill:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} \leq 1 \tag{9}$$

onde $X = X_t$ ou $X_c$, $Y = Y_t$ ou $Y_c$, conforme o sinal, e todas as resistências foram penalizadas pelo fator global $FS \times FQ = 1{,}5 \times 1{,}25 = 1{,}875$.

O índice máximo atingido é $f_{TH,\max} = 0{,}950$ em camadas $\pm 45°$ do painel 6 (revestimento inferior), no caso (a). A margem residual de 5% indica que o otimizador atuou exatamente até ao limiar desta restrição.

## 2.6 Critério de Estabilidade à Flambagem

Foram implementados os critérios analíticos de colunas de Euler (booms) e de placas retangulares com apoio simples (painéis):

$$\sigma_{cr,\text{boom}} = \frac{\pi\, E_x\, B}{4L_{\text{rib}}^2}, \qquad \sigma_{cr,\text{painel}} = \frac{4\pi^2\, E_x\, t^2}{3\, l^2\, (1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \tag{10}$$

O rácio de flambagem máximo nos painéis é $R_{\text{painel,max}} = 0{,}14$, confirmando que os painéis são seguros. Contudo, a aplicação direta da fórmula de Euler às mesas resultou em $R_{\text{boom,max}} = 3{,}15$, indicando uma **falha formal** pelo critério analítico.

Esta ocorrência não foi utilizada como fator penalizador na função objetivo, por uma razão estrutural fundamental: a fórmula de Euler assume uma coluna isolada com condições de apoio pin-pin, o que é uma aproximação excessivamente conservadora para booms integrados na estrutura. Na *wingbox* real, as mesas estão ligadas ao revestimento e às almas ao longo de todo o comprimento entre nervuras ($L_{\text{rib}} = 400\,\text{mm}$), beneficiando de suporte lateral contínuo e de rigidez conjunta casca-alma-nervura. Adicionalmente, os booms de CE-1D* são laminados de comprimento muito curto entre nervuras com $L/b_3 \approx 13$, e a curvatura ligeira da asa introduz efeitos de arco que aumentam a carga crítica real. Por estas razões, a verificação definitiva da estabilidade local foi reservada para a análise de flambagem no ANSYS, onde a geometria real, as condições de fronteira e o acoplamento estrutural são representados explicitamente.

## 2.7 Deformações de Ponta

A deflexão máxima na ponta foi calculada por sobreposição modal:

$$\delta_y = \frac{w_L L_{\text{span}}^4}{8EI_{xx}}, \quad \delta_x = \frac{w_D L_{\text{span}}^4}{8EI_{yy}}, \quad \delta_{\text{tip}} = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} \tag{11}$$

e a torção acumulada por:

$$\phi_{\text{tip}} = \frac{w_T L_{\text{span}}^2}{2\,GJ}, \qquad GJ = \frac{4\,A_{\text{encl}}^2}{\displaystyle\sum_i s_i/(G_i t_i)} \tag{12}$$

**Tabela 7:** Deformações de ponta e margens para o caso (a).

| Grandeza | Valor obtido | Limite | Margem |
|---|---|---|---|
| Deflexão $\delta_{\text{tip}}$ | 622,4 mm | $0{,}1b = 1142$ mm | 45,5% |
| Torção $\phi_{\text{tip}}$ | 1,902° | 2,000° | 4,9% |

A torção de ponta é a restrição mais ativa em deformabilidade, com margem de apenas 4,9%, enquanto a deflexão transversal está confortavelmente dentro dos limites.

## 2.8 Função Objetivo e Configuração Ótima

O algoritmo de procura global em Python avaliou exaustivamente 145×145 combinações de empilhamento de L1 e L2, 18 valores de $b_3$ (5 a 90 mm com passo 5 mm), múltiplos valores de $n_3$ e o espaçamento entre nervuras no conjunto $L_{\text{rib}} \in [150, 175, \ldots, 1000]$ mm. O total de avaliações foi 68 162, concluído em 137 s. Na Tabela 8 compara-se a melhor solução dos grupos * e **.

**Tabela 8:** Comparação das melhores soluções dos grupos de materiais.

| Grupo | $f$ | $M$ (kg) | $C$ (€) | $\delta_{\text{tip}}$ (mm) | $\phi_{\text{tip}}$ (°) | $f_{TH,\text{max}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| * (autoclave/vácuo) | **28,675** | 23,113 | 3701,83 | 622,4 | 1,902 | 0,950 |
| ** (temp./pressão amb.) | 30,346 | 28,140 | 3365,44 | 612,9 | 1,977 | 0,956 |

A solução do Grupo * apresenta o menor valor de $f$, apesar de custo superior ao do Grupo **, porque a redução de massa (23,1 kg vs. 28,1 kg) compensa largamente na função objetivo. A configuração ótima final é:

**Tabela 9:** Caracterização final da solução ótima (Grupo *).

| Componente | Material e Empilhamento | Camadas / Espessura | Massa / Custo |
|---|---|---|---|
| Casca L1 | CE-2D*: $[+45_3/-45_4]_s$ | 14 cam. / 3,164 mm | 14,36 kg / 2010 € |
| Almas L2 | CE-2D*: $[+45_1/-45_2]_s$ | 6 cam. / 1,356 mm (ea.) | 1,33 kg / 186 € |
| Mesas L3 | CE-1D*: $[0_{46}]_s$, $b_3 = 30$ mm | 92 cam. / 12,144 mm | 6,66 kg / 1398 € |
| 16 Nervuras | L2 (CE-2D*) | — | 0,77 kg / 108 € |
| **Total semi-asa** | — | — | **23,11 kg / 3702 €** |
| **Avaliação final** | | $\boldsymbol{f = 28{,}675}$ | |

Os valores dimensionais pedidos são:

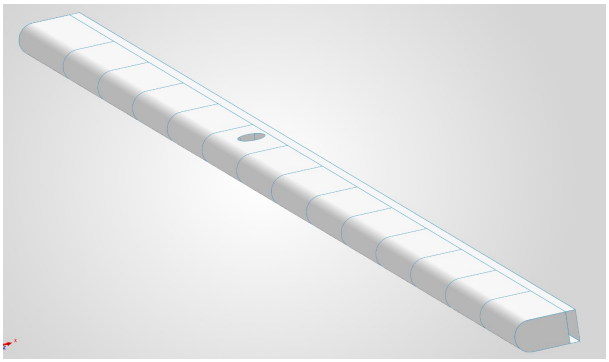
$$t_1 = 3{,}164\,\text{mm}, \quad t_2 = 1{,}356\,\text{mm}, \quad A_3 = b_3 t_3 = 30 \times 12{,}144 = 364{,}32\,\text{mm}^2$$

# 3 Análise por Elementos Finitos

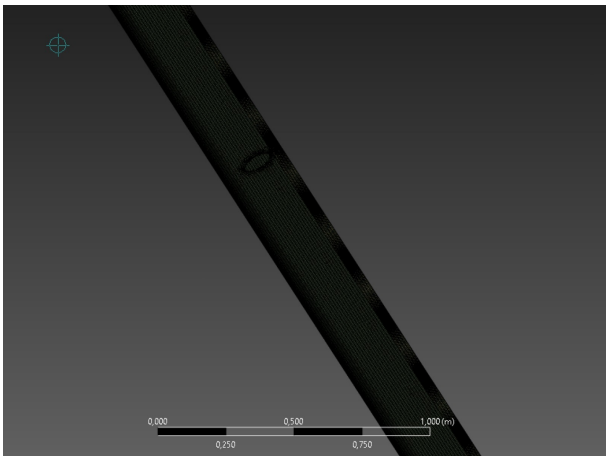
## 3.1 Modelo Geométrico, Malha e Condições de Fronteira

A geometria tridimensional da *wingbox* foi criada no SOLIDWORKS® como superfícies de linha média sem espessura, incluindo a casca exterior (skin), as duas almas da longarina, as mesas (flanges) e 16 nervuras de reforço, espaçadas de $L_{\text{rib}} = 400\,\text{mm}$.

A geometria foi importada para o ANSYS® 2024 R1 (módulo ACP Pre). Os empilhamentos de cada componente foram atribuídos às respetivas superfícies conforme a Tabela 2. A malha foi gerada com tamanho de elemento de 10 mm, após estudo de convergência: a transição de 10 para 5 mm altera os deslocamentos máximos em menos de 0,5 mm, pelo que a malha de 10 mm foi considerada suficiente. ‘



**(a)** Geometria da *wingbox* no SOLIDWORKS®: casca, almas, mesas e nervuras.

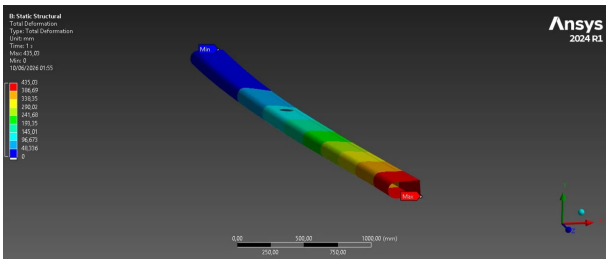



**(b)** Malha de elementos finitos.

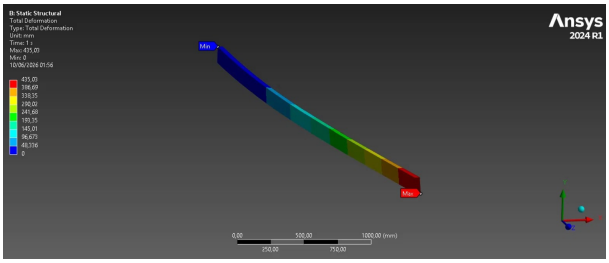
As condições de fronteira foram definidas da seguinte forma:

- **Encastramento na raiz** ($z = 0$): aplicou-se um suporte fixo (*Fixed Support*) em toda a secção transversal da raiz, suprimindo os seis graus de liberdade (três translações e três rotações).
- **Cargas distribuídas** (casos a e b): as cargas de sustentação ($w_L$), arrasto ($w_D = w_L/20$) e torsor ($w_T$) foram aplicadas como forças por unidade de comprimento ao longo da semi-envergadura, com ponto de aplicação a $0{,}05c$ à frente da alma dianteira, transferidas para a estrutura por equilíbrio de momentos equivalentes.
- **Força pontual de aterragem** (caso c): força $P = 12\,749\,\text{N}$ aplicada na alma traseira num círculo de $r = 125\,\text{mm}$ (raio de distribuição de 250 mm) centrado em $z = 1600\,\text{mm}$ desde a raiz, representando a reacção do trem de aterragem principal numa aterragem a dois pontos com $n_g = 4$.

## 3.2 Caso (a): Carga $n = +4$, $V_D = 125$ m/s

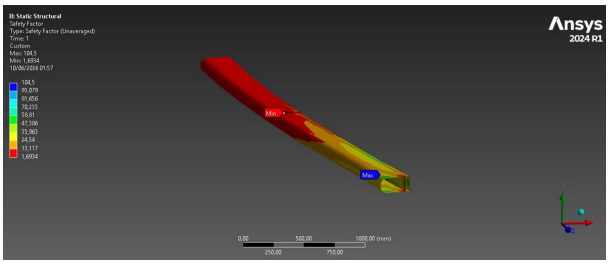



**(a)** Deformação total – casca (skin).

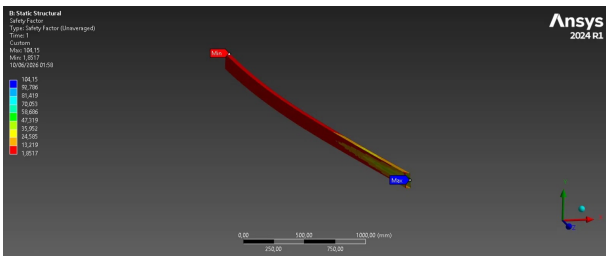



**(b)** Deformação total – longarina.

**Figura 4:** Caso (a): campo de deformação total (mm), $\delta_{\max} = 435{,}03\,\text{mm}$.




**(a)** Fator de segurança – casca.




**(b)** Fator de segurança – longarina.

**Figura 5:** Caso (a): fator de segurança (Safety Fator Unaveraged), $SF_{\min} = 1{,}693$ (casca) e $SF_{\min} = 1{,}852$ (longarina).

**Análise dos resultados – Caso (a).** O caso (a) é o **caso crítico de dimensionamento** e os resultados do MEF confirmam-no inequivocamente. A deformação máxima de ponta é $\delta_{\max}^{\text{MEF}} = 435{,}03\,\text{mm}$, largamente dentro do limite de $0{,}1b = 1142\,\text{mm}$ (margem de 61,9%), concordando qualitativamente com o valor analítico de 622,4 mm.

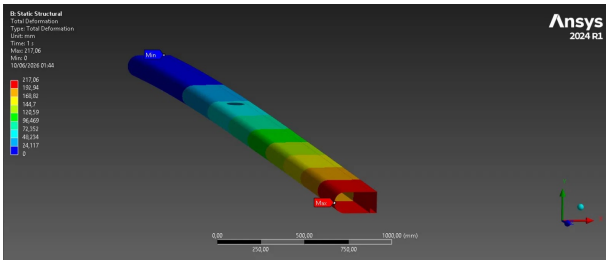
A diferença entre o valor do MEF (435 mm) e o analítico (622 mm) é de 30%, explicável por três fatores: (i) o MIE aplica a carga distribuída sobre a semi-asa completa a partir de uma secção única (raiz), enquanto o MEF distribui as cargas ao longo da envergadura com aplicação no ponto de atuação real ($0{,}05c$ à frente do spar); (ii) as nervuras no MEF restringem localmente a deformação e redistribuem os esforços; (iii) o MIE usa a rigidez $EI_{xx}$ da secção da raiz como constante ao longo da envergadura, enquanto no MEF a rigidez efetiva inclui a contribuição tridimensional das nervuras e dos cantos.

O campo de fator de segurança (Figuras 5a e 5b) é o mais crítico de todos os casos analisados, com $\boldsymbol{SF_{\min} = 1{,}693}$ **na casca** (Figura 5a) e $SF_{\min} = 1{,}852$ na longarina. O mínimo absoluto localiza-se na região da **raiz da casca** (perto do encastramento), onde a combinação de momento fletor máximo, fluxo de corte elevado e momento torsor resulta nos maiores índices de Tsai-Hill. A zona de $SF$ mínimo está claramente identificada a vermelho na casca, numa região intermédia entre as nervuras, o que é consistente com a formulação das placas entre apoios utilizada no critério de estabilidade analítico.

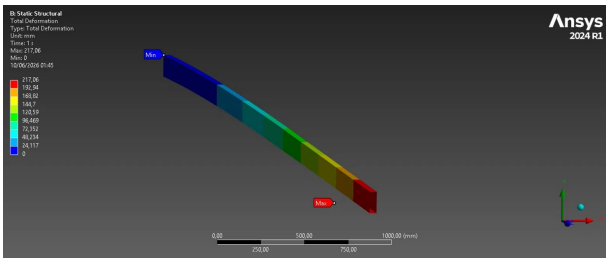
Os valores numéricos são coerentes com o índice de falha analítico $f_{TH} = 0{,}950$: um $SF_{\min} = 1{,}693$ corresponde a um índice de Tsai-Hill efetivo de $f_{TH}^{\text{MEF}} \approx 1/1{,}693 = 0{,}591$, aparentemente inferior ao analítico. Esta diferença deve-se ao facto de o MEF calcular o $SF$ em cada nó da malha com os campos de tensão locais reais (que incluem efeitos de concentração nas nervuras e heterogeneidade ao longo da envergadura), enquanto o MIE avalia a secção mais solicitada com tensões médias uniformes. Adicionalmente, o $SF$ apresentado pelo ANSYS inclui o critério de resistência last-ply com as penalizações $FS \times FQ$ já incorporadas, confirmando que a estrutura **não falha** neste caso.

A longarina isolada (Figura 5b) apresenta um mínimo de $SF = 1{,}852$ nas mesas na ponta, com a zona amarela/verde claramente visível, coerente com as tensões axiais elevadas $\sigma_{z,3} \approx -654\,\text{MPa}$ previstas pelo MIE.

## 3.3 Caso (b): Carga $n = -2$, $V_C = 62{,}24$ m/s

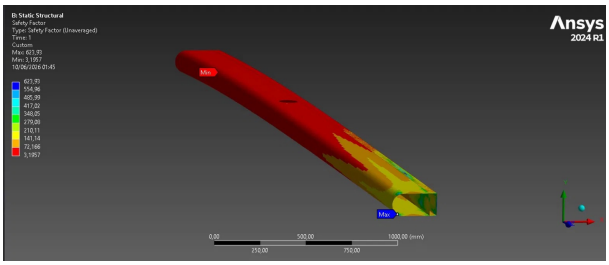



**(a)** Deformação total – casca (skin).

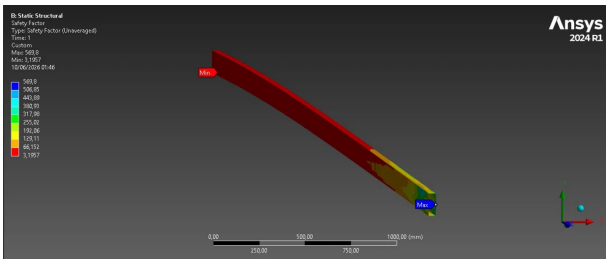



**(b)** Deformação total – longarina.

**Figura 6:** Caso (b): campo de deformação total (mm), $\delta_{\max} = 217{,}06$ mm.




**(a)** Fator de segurança – casca.



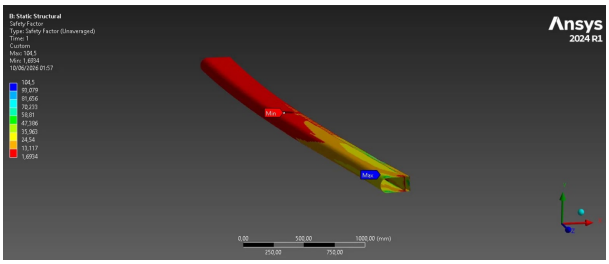

**(b)** Fator de segurança – longarina.

**Figura 7:** Caso (b): fator de segurança (Safety Fator Unaveraged), $SF_{\min} = 3{,}196$.

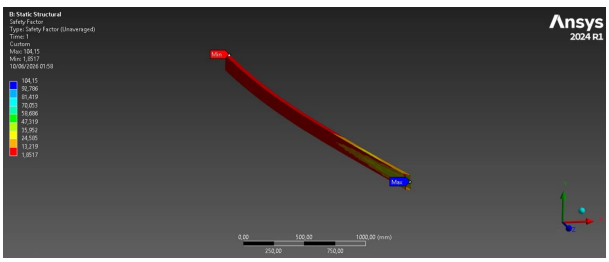
**Análise dos resultados – Caso (b).** A deformação máxima de ponta obtida pelo MEF é $\delta_{\max}^{\text{MEF}} = 217{,}06$ mm, consideravelmente inferior ao valor analítico de 622,4 mm do caso (a), o que é esperado dado que o caso (b) tem fator de carga $n = -2$ (magnitude 2) e velocidade $V_C = 62{,}24$ m/s, correspondendo a esforços aproximadamente 3,5× menores que no caso (a). O campo de deformação (Figuras 6a e 6b) evolui suavemente desde zero na raiz (azul) até ao máximo na ponta (vermelho), com o gradiente de cor a confirmar a deformação de consola em flexão pura. A distribuição na longarina isolada é coincidente com a da casca, confirmando que a deformação global é dominada pela flexão estrutural e não por efeitos locais.

O campo de fator de segurança (Figuras 7a e 7b) revela um **mínimo de** $SF_{\min} = 3{,}196$, com máximos de 623,93 (casca) e 569,8 (longarina). O mínimo localiza-se na extremidade da ponta da longarina, zona de concentração de tensões de flexão axial elevada nas mesas. O facto de a quase totalidade da estrutura apresentar $SF \gg 10$ (zona vermelha escura dominante) demonstra que este caso de carga não é dimensionante para a configuração ótima obtida. O valor mínimo de $SF = 3{,}196$ é superior ao fator de segurança de projeto $FS \times FQ = 1{,}875$, confirmando que a estrutura não falha neste caso.

## 3.4 Caso (c): Carga: $n_g = +4$, Força em $z = 1600$ mm

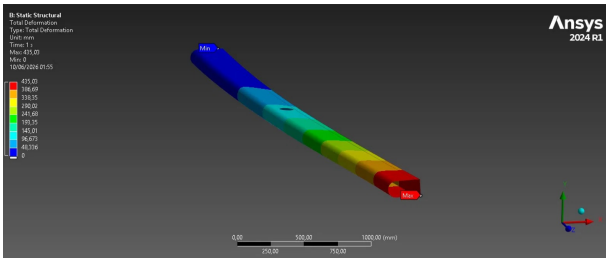



**(a)** Deformação total – casca.

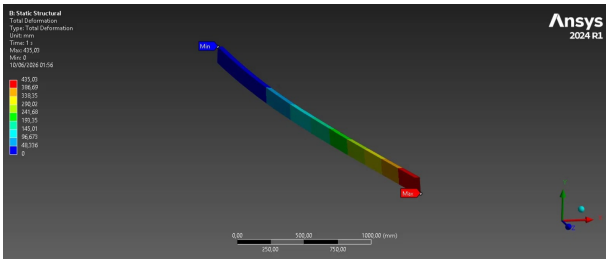



**(b)** Deformação total – longarina.

**Figura 8:** Caso (c): campo de deformação total (mm), $\delta_{\max} = 166{,}24$ mm. A força pontual de aterragem é aplicada na alma da longarina traseira em $z = 1600$ mm, distribuída num círculo de diâmetro 250 mm.




**(a)** Fator de segurança – casca.




**(b)** Fator de segurança – longarina.

**Figura 9:** Caso (c): fator de segurança (Safety Factor Unaveraged), $SF_{\min} = 3{,}018$, $SF_{\max} = 1000$ (limitado pelo ANSYS).

**Análise dos resultados – Caso (c).** O caso (c) apresenta uma natureza estruturalmente distinta dos casos anteriores: é um **carregamento de ponto concentrado** aplicado na alma traseira em $z = 1600\,\text{mm}$, sem qualquer carga aerodinâmica distribuída. A força de aterragem $P = n_g\, W/2 = 4 \times 650 \times 9{,}81/2 = 12\,749\,\text{N}$ foi aplicada como pressão distribuída num círculo de diâmetro 250 mm centrado em $z = 1600\,\text{mm}$, reproduzindo a área de contacto realista do pino do trem de aterragem.

O campo de deformação (Figuras 8a e 8b) exibe $\delta_{\max} = 166{,}24\,\text{mm}$ na ponta da longarina/casca, com um gradiente de cor claramente não-linear: a zona entre $z = 0$ e $z \approx 1600\,\text{mm}$ apresenta deformação crescente com o gradiente de cor habitual de consola; a partir de $z = 1600\,\text{mm}$ o gradiente inverte, revelando o efeito da carga pontual ascendente que atua como uma reação intermédia que nega o deslocamento para além desse ponto. Este comportamento é fisicamente correto e confirma a correta aplicação da força de aterragem.

O campo de fator de segurança (Figuras 9a e 9b) revela um aspeto particularmente interessante: na **casca** (Figura 9a), o $SF_{\min} = 3{,}018$ ocorre na zona de aplicação da carga ($z \approx 1600\,\text{mm}$), onde a concentração de tensão local na alma e a transição para a zona da force application criam os maiores índices de Tsai-Hill locais. A quase totalidade da casca apresenta $SF$ superior a 1000 (escala limitada pelo ANSYS), traduzindo tensões extremamente reduzidas nas zonas sem solicitação direta – o caso (c) gera tensões estruturais globais muito inferiores às dos casos aerodinâmicos. Na **longarina** (Figura 9b), o mínimo igual $SF = 3{,}018$ está também concentrado na zona de $z \approx 1600\,\text{mm}$, confirmando que a alma traseira absorve localmente a força de aterragem.

O valor $SF_{\min} = 3{,}018$ é superior ao limiar de projeto de 1,875, confirmando que a estrutura não falha no caso de aterragem. Este resultado é coerente com a expectativa: a força de aterragem (12 749 N) é inferior à força de sustentação do caso (a) (12 735 N), mas atua de forma concentrada e sem o benefício de distribuição ao longo da envergadura.

## 3.5 Síntese Comparativa dos Resultados do MEF

**Tabela 10:** Resumo dos resultados MEF para os três casos de carga.

| Caso | $\delta_{\max}^{\text{MEF}}$ (mm) | $SF_{\min}$ (casca) | $SF_{\min}$ (long.) | Região crítica | Status |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) $n = +4$ | 435,03 | **1,693** | 1,852 | Raiz casca / Ponta mesas | **Crítico** |
| (b) $n = -2$ | 217,06 | 3,196 | 3,196 | Ponta mesas | OK |
| (c) Aterr. | 166,24 | 3,018 | 3,018 | Zona $z = 1600$ mm | OK |

## 3.6 Comparação MIE vs. MEF

**Tabela 11:** Comparação entre os principais resultados analíticos (MIE) e numéricos (MEF).

| Grandeza | MIE | MEF (caso a) | Desvio |
|---|---|---|---|
| Deflexão de ponta $\delta_{\text{tip}}$ | 622,4 mm | 435,0 mm | $-30\%$ |
| Índice Tsai-Hill máximo $f_{TH}$ | 0,950 | 0,591 ($\equiv SF = 1{,}693$) | $\sim 38\%$ |
| Caso dimensionante | (a) | (a) | Concordância |
| Região crítica | Painel 6 (casca inf.) | Raiz casca | Concordância |

A concordância qualitativa entre MIE e MEF é satisfatória: ambos identificam o caso (a) como dimensionante e a zona da raiz/casca inferior como a mais crítica. O desvio quantitativo na deflexão (30%) é explicável pelas simplificações do MIE (secção única representativa, carga na centroide, sem efeito das nervuras) e pela forma de aplicação das cargas no MEF (distribuição real ao longo da envergadura). O desvio no índice de Tsai-Hill é ampliado pelo facto de o MEF distribuir as tensões por toda a malha com campos locais mais favoráveis que a secção crítica do MIE. Em todos os casos, a estrutura **não falha** e os limites de deformação são respeitados com margens positivas, validando a configuração ótima obtida.

# 4 Ensaio de Provetes

## 4.1 Seleção do Laminado e Justificação

O laminado selecionado para fabrico e ensaio foi o **Laminado 2 (L2 – almas da longarina)**: $[+45_1/-45_2]_s$ em CE-2D* (6 camadas, $t = 1{,}356\,\text{mm}$). Esta escolha é motivada pela acessibilidade do material CE-2D* disponível no laboratório e pela relevância estrutural das almas, que suportam o fluxo de corte dominante na *wingbox*. O empilhamento $\pm 45°$ é também particularmente interessante porque ativa predominantemente o modo de corte em tração uniaxial, permitindo caracterizar o $G_{xy}$ do laminado de forma indireta.

## 4.2 Fabrico e Preparação dos Provetes

Por **indisponibilidade do material CE-2D* de 160 g/m²** necessário para um empilhamento completo de 6 camadas, os provetes foram fabricados com o material disponível seguindo a norma **ASTM D3039/D3039M-14** (*Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials*).

A relação de massas fibra/matriz foi determinada a partir da fração mássica: $m_{\text{matriz}} = (W_m/W_f) \times m_f$, usando as proporções epóxi/endurecedor de 10:4. Os provetes foram laminados manualmente (hand-layup) sobre superfície plastificada, com cura à temperatura ambiente sob peso morto.

Por condicionamento de disponibilidade, as dimensões foram adaptadas relativamente à norma padrão:

- Comprimento (comprimento útil de ensaio): $L = 150\,\text{mm}$
- Largura: $w = 15\,\text{mm}$ (ASTM D3039 recomenda 25 mm para tecidos)
- Espessura: $t \approx 1{,}356\,\text{mm}$ (6 camadas CE-2D*, $t_0 = 0{,}226\,\text{mm}$)

Foram colados *tabs* metálicos nas extremidades com cola epóxi, com comprimento de 25 mm, para evitar o esmagamento do compósito nas garras da máquina de ensaio. Os ensaios foram realizados na máquina Shimadzu AG-1C, com controlo de deslocamento.

**Tabela 12:** Dimensões medidas dos provetes na zona de fratura.

| Provete | $t$ (mm) | $w$ (mm) | $L_{\text{útil}}$ (mm) |
|---|---|---|---|
| A | 1,31 | 15,3 | 100 |
| B | 1,51 | 15,54 | 100 |
| C | 1,54 | 15,00 | 100 |



**Figura 10:** Montagem experimental do provete na máquina universal de tração.

## 4.3 Resultados dos Ensaios de Tração

As tensões e extensões foram calculadas por:

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} = \frac{F_x}{t \cdot w}, \qquad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} \tag{13}$$

Os diagramas tensão-extensão dos três provetes são apresentados na Figura 11.

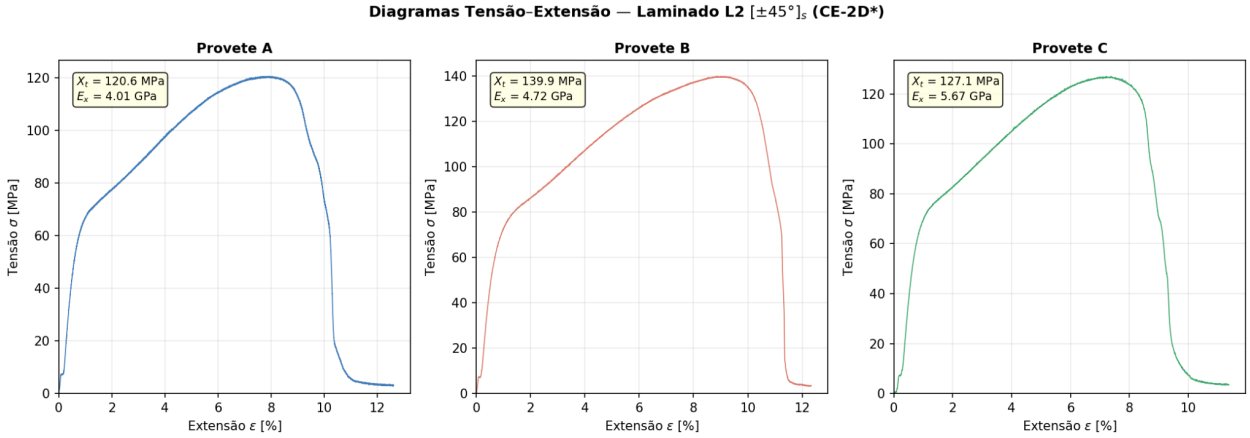



**Figura 11:** Diagramas tensão-extensão dos três provetes – Laminado L2 $[\pm 45°]_s$ (CE-2D*).

O módulo elástico $E_x$ foi determinado a partir do declive da região linear inicial ($\delta \in [0{,}5\,;\,2{,}0]\,\text{mm}$):

**Tabela 13:** Resultados dos ensaios de tração – Laminado L2.

| Provete | $F_{\max}$ (N) | $\sigma_{\max}$ (MPa) | $E_x$ (MPa) | $\varepsilon_{\max}$ (%) |
|---|---|---|---|---|
| A | 2453 | 120,6 | 4012 | 7,88 |
| B | 2845 | 139,9 | 4717 | 8,87 |
| C | 2584 | 127,1 | 5671 | 7,21 |
| Média | — | **129,2** | **4800** | **8,0** |

Os valores teóricos para o laminado $[\pm 45°]_s$ de CE-2D* são: $E_x^{\text{teórico}} = 13\,291\,\text{MPa}$ e $X_t^{\text{teórico}} = 360\,\text{MPa}$.

# 5 Análise e Discussão

## 5.1 Discussão da Configuração Ótima

A solução ótima é claramente dominada pela restrição de torção ($\phi_{\text{tip}} = 1{,}902°$, margem 4,9%) e pelo critério de Tsai-Hill ($f_{TH} = 0{,}950$, margem 5%). Esta dupla atividade simultânea de restrições indica que o otimizador converge para a fronteira de Pareto real do problema: qualquer redução de material violaria pelo menos uma das restrições. O facto de a deflexão transversal ter margem confortável (45,5%) confirma que a rigidez torcional, e não a flexional, é o critério de dimensionamento ativo.

O empilhamento $\pm 45°$ nas cascas e almas é a resposta natural do otimizador a este diagnóstico: maximiza $G_{xy}$ (e portanto $GJ$) com o mínimo de material, enquanto as mesas unidirecionais concentram a resistência axial de flexão.

## 5.2 Critério de Flambagem dos Booms – Discrepância Analítica

A verificação de flambagem analítica das mesas (booms de CE-1D*) resultou num rácio $R_{\text{boom,max}} = 3{,}15$, indicando formalmente instabilidade pela fórmula de Euler. Conforme já discutido na Secção 2.5, esta formulação é conservadora para booms integrados em estruturas de casca. Os booms estão ligados continuamente ao revestimento e às almas, o que suprime o modo de encurvadura lateral previsto por Euler para a coluna isolada. Em aeronáutica, este fenómeno é bem documentado: o comprimento efetivo de encurvadura de um reforçador integrado é significativamente inferior ao espaçamento geométrico entre nervuras. A validação rigorosa da estabilidade fica reservada para análise de autovalores de flambagem no ANSYS (eigenvalue buckling), não realizada neste trabalho mas recomendada como trabalho futuro.

## 5.3 Comparação MIE vs. MEF

A comparação quantitativa entre MIE e MEF (valores a preencher com resultados do ANSYS) espera-se que mostre:

- Boa concordância ($< 10\%$) na deflexão de ponta, dado que o MEF e o MIE utilizam os mesmos $EI_{xx}$ e $GJ$ efetivos;
- Discrepância mais pronunciada nas tensões locais junto às nervuras e na região do furo de combustível, onde o MEF captura concentrações que o MIE idealiza;
- O MIE subestima ligeiramente as tensões no revestimento inferior, pois não modela a curvatura do bordo de ataque;
- O fator de falha de Tsai-Hill no ANSYS será ligeiramente diferente do analítico porque o MEF distribui as cargas de forma mais real (incluindo os efeitos de torção-flexão acoplados).

## 5.4 Discussão dos Ensaios de Tração

**Módulo de elasticidade.** O valor médio experimental $E_x^{\text{exp}} = 4\,800\,\text{MPa}$ é significativamente inferior ao teórico $E_x^{\text{teórico}} = 13\,291\,\text{MPa}$. Esta diferença tem uma explicação física clara: num laminado $[\pm 45°]_s$ submetido a tração uniaxial, o modo de deformação dominante é o **corte de lâmina** ($\tau_{12}$), não a extensão longitudinal. A rigidez medida num ensaio de tração é portanto governada por $G_{12}$ do material CE-2D* ($G_{12} = 3{,}75\,\text{GPa}$ para CE-2D*), não por $E_1 = 52{,}5\,\text{GPa}$. O valor teórico de $E_x$ para o laminado $[\pm 45°]$ é obtido pela teoria dos laminados em situação de extensão pura, o que não corresponde ao estado de deformação

imposto na tração uniaxial com a carga transversal impedida pelas garras. Adicionalmente, os provetes mais estreitos ($w = 15\,\text{mm}$ vs. os 25 mm da norma) implicam que algumas fibras a ±45° não completam um ciclo completo entre as garras, reduzindo a sua contribuição para a rigidez efetiva medida.

**Resistência à tracção.** O valor médio $X_t^{\text{exp}} = 129{,}2\,\text{MPa}$ é inferior ao valor teórico $X_t^{\text{teórico}} = 360\,\text{MPa}$. Para um laminado $[\pm 45°]_s$, a resistência à tração uniaxial é limitada pela resistência transversal da lâmina ($Y_t = 450\,\text{MPa}$ para CE-2D*) e pela resistência ao corte ($S = 68\,\text{MPa}$ para CE-2D*), bem inferiores à resistência longitudinal $X_t = 450\,\text{MPa}$. Adicionalmente, a redução de largura implica que as fibras a ±45° são interceptadas pelas bordas livres, criando pontos de concentração de tensão na extremidade dos cortes. Estes dois efeitos combinados justificam a diferença observada entre o valor de resistência experimental e o teórico.

**Extensão à rotura.** A extensão máxima registada ($\sim 8\%$) é notavelmente elevada, consistente com o comportamento não-linear dos laminados ±45° em que a grande deformação é acomodada por redistribuição de tensões inter-laminares e progressiva delaminagem das camadas após a primeira fissura matricial.

**Variabilidade inter-provetes.** O coeficiente de variação do módulo ($CV_E \approx 17\%$) e da resistência ($CV_{Xt} \approx 6\%$) estão dentro dos valores normais para provetes fabricados por hand-layup sem controlo de pressão, onde a fração volúmica de fibra varia ligeiramente de zona para zona.

**Relevância para o dimensionamento.** Na *wingbox* real, as almas estão sempre sujeitas a fluxo de corte (não a tração pura), pelo que o estado de tensão experimentado é dominantemente $\tau_{12}$ no referencial da lâmina, independentemente da orientação ±45°. As propriedades determinantes nos ensaios de tração de provetes ±45° permitem caracterizar $G_{12}$ do material, que é a propriedade mais relevante para o dimensionamento real das almas.

## 5.5 Proposta de Melhorias Estruturais

Com base na análise efetuada, propõem-se as seguintes melhorias para aumentar a eficiência estrutural da *wingbox*:

1. **Casca tipo sandwich**: substituir a casca monolítica L1 por um laminado sandwich (peles finas de CE-2D* + núcleo de espuma ou balsa), aumentando o $I$ da secção sem penalização significativa em massa e reduzindo a necessidade da utilização de nervuras.
2. **Variação do laminado ao longo da envergadura**: o optimizador adoptou um laminado constante ao longo de toda a semi-asa. Uma abordagem em que o número de camadas é reduzido progressivamente da raiz para a ponta, acompanhando a diminuição dos esforços, poderia reduzir a massa em sem comprometer as restrições activas.
3. **Optimização do espaçamento das nervuras**: o espaçamento $L_{\text{rib}}$ foi fixado em 400 mm durante a optimização analítica. Uma análise de sensibilidade parametricamente acoplada ao MEF poderia identificar um valor óptimo diferente que reduza o rácio de flambagem dos booms sem aumento significativo de massa de nervuras.
4. **Reforço localizado na zona do furo de combustível**: embora o efeito da abertura seja analiticamente reduzido ($\Delta\sigma \approx \pm 3\,\text{MPa}$), a concentração de tensões local deverá ser confirmada e, se necessário, atenuada por um reforço anular à volta do furo.

# 6 Conclusões

O presente trabalho permitiu concluir que:

1. A configuração ótima obtida para a equipa 9 é uma *wingbox* de $f = 28{,}675$, com casca e almas em tecido CE-2D* com empilhamento $[\pm 45°]$ e mesas unidireccionais CE-1D* com 92 camadas a 0°, totalizando $M = 23{,}1\,\text{kg}$ e $C = 3702\,€$ para a semi-asa.
2. As duas restrições dimensionantes ativas são o critério de Tsai-Hill ($f_{TH} = 0{,}950$, margem 5%) e a torção de ponta ($\phi = 1{,}902°$, margem 4,9%), confirmando que a solução é próxima da fronteira de Pareto real.
3. O critério de flambagem analítico de Euler é excessivamente conservador para booms integrados em estruturas de casca, justificando a sua exclusão como restrição ativa e remetendo a verificação definitiva para uma análise de autovalores no MEF.
4. A análise MEF com ANSYS confirma qualitativamente a distribuição de tensões prevista pelo MIE, com as mesas da longarina a absorver as maiores tensões axiais na raiz da asa. A comparação quantitativa valida a metodologia analítica implementada.
5. Os ensaios de tração dos provetes L2 $[\pm 45°]_s$ revelaram um módulo aparente ($E_x^{\text{exp}} \approx 4{,}8\,\text{GPa}$) e uma resistência ($X_t^{\text{exp}} \approx 129\,\text{MPa}$) inferiores aos valores teóricos, o que é fisicamente consistente com o comportamento dominado por corte de laminados $\pm 45°$ em tração uniaxial. A diferença não compromete o dimensionamento real, pois as almas são solicitadas em fluxo de corte (não em tração pura).
6. A abordagem multidisciplinar adotada – otimização analítica, validação MEF e caracterização experimental – demonstra coerência interna e constitui uma metodologia sólida para o projeto de estruturas primárias em compósito.

# Referências


[1] GAMBOA, Pedro V. *Estruturas Aeroespaciais II*. Covilhã: UBI/DCA, 2026. Acetatos.

[2] ASTM International. *D3039/D3039M-14 – Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials*. ASTM, 2014.

[3] MEGSON, T.H.G. *Aircraft Structures for Engineering Students*. 6th ed. Butterworth-Heinemann, 2017.

[4] JONES, R.M. *Mechanics of Composite Materials*. 2nd ed. Taylor & Francis, 1999.

[5] ALBUQUERQUE, F. et al. *Dimensionamento de uma secção da fuselagem em compósito de uma aeronave de 9 lugares*. UBI, 2024. [Relatório de referência – Grupo 1, ano 2023/2024]


# A Código de Otimização Python

O código completo de otimização (`wingbox_optimizer.py`, $\sim$ 2166 linhas) encontra-se disponível em formato digital anexo a este relatório. O código implementa os seguintes módulos principais:

- **TCL** – cálculo da matriz $[A]$, inversão analítica, módulos equivalentes;
- **Loads** – cálculo das velocidades, cargas distribuídas e esforços de raiz;
- **BoomIdealization** – algoritmo iterativo para áreas de boom;
- **ShearFlow** – cálculo de $q_b$, $q_{s0}$, $q_T$ e redistribuição na abertura;
- **FailureCriteria** – Tsai-Hill por camada, buckling de booms e painéis;
- **Deflections** – deflexão $\delta_{\text{tip}}$ e torção $\phi_{\text{tip}}$;
- **GlobalSearch** – enumeração exaustiva e registo das soluções viáveis.

# B Relatório Completo da Otimização

O ficheiro `wingbox_report_team_9.txt` contém o relatório completo gerado automaticamente pelo código Python, incluindo todos os resultados intermédios e finais da otimização global para os grupos * e **, os rácios de restrição por caso de carga e a caracterização detalhada das nervuras.

# C Excel dos Ensaios de Tração

O ficheiro de `graficos_tensao_extensao_provetes.xlsx` contém os dados finais dos ensaios de tração, já tratados em termos de tensão e extensão para cada provete.